BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.Т.ГУСЕЙНОВ
Бакинский Государственный Университет

В статье исследуется модельное равномерно вырождающееся эллиптическое уравнение второго порядка, для которого множество гладких функций не плотно в соответствующем весовом соболевском пространстве. Вводится понятие W - и H решений, доказывается однозначная разрешимость соответствующих задач Дирихле.

§1. Введение.

Рассмотрим в единичном круге $B \subset R^2$ с центром в начале координат вырождающееся эллиптическое уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0\,, \tag{1.1}$$

с весом

$$\omega(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha_1}, \ x_1 > 0,\ x_2 > 0; \\ |x|^{\beta_1}, \ x_1 < 0,\ x_2 > 0; \\ |x|^{-\alpha_2}, \ x_1 < 0,\ x_2 < 0; \\ |x|^{\beta_2}, \ x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ 0 < \alpha_i < 2,\ 0 < \beta_i < 2,\ i = 1,2. \end{cases} \tag{1.2}$$

С уравнением (1.1) связан класс функций $W(B,\omega)$:

$$W(B,\omega) = \left\{u : u \in W_1^1(B),\ \left(u^2 + |\nabla u|^2\right)\omega \in L_1(B)\right\}. \tag{1.3}$$

Здесь $W_1^1(B)$- классическое соболевское пространство функций, суммируемых в B вместе с обобщенными производными первого порядка. Ниже $W(B,\omega)$ рассматривается как весовое соболевское пространство с нормой

$$\|u\|_W^2 = \int_B \left(u^2 + |\nabla u|^2\right)\omega dx\,.$$

Так как $\omega^{-1} \in L_1(B)$, то (см.[1]) пространство $W(B,\omega)$ полно. Замыкание множества функций из $W(B,\omega)$ с компактным носителем в B будем обозначать через $W_0(B,\omega)$. Рассматриваемый вес удовлетворяет A_2 - условию Махенхаупта [2] в каждой из четвертей плоскости u (см.,напр., [3]) имеет место неравенство Фридрихса

$$\int_B u^2 \omega dx \le C \int_B |\nabla u|^2 \omega dx \quad \forall u \in W_0(B,\omega). \tag{1.4}$$

Поэтому в соболевском пространстве $W_0(B,\omega)$норму можно задавать равенством

$$\|u\|_{W_0}^2 = \int_B |\nabla u|^2 \omega dx.$$

Введем одно из возможных понятий решения уравнения (1.1).

Определение 1.1. *Функция $u \in W(B,\omega)$ называется W - решением уравнения (1.1), если интегральное тождество*

$$\int_B \nabla u \nabla \psi \omega dx = 0 \tag{1.5}$$

выполнено на пробных функциях $\psi \in W_0(B,\omega)$.

Множество гладких в B функций не плотно в пространствах $W(B,\omega)$ и $W_0(B,\omega)$. Доказательство этого утверждения в случае, когда весовая функция (1.2) удовлетворяет условию $\alpha_1 = \alpha_2$, содержится в работах [1], [4]. Следуя этим работам, мы для полноты изложения, приводим аналогичное доказательство данного свойства в лемме 2.1.

В связи со сказанным выше имеет смысл определить пространства $H(B,\omega)$ и $H_0(B,\omega)$ как замыкание в $W(B,\omega)$ множеств $C^\infty(B) \cap W(B,\omega)$ и $C^\infty(B)$ соответственно.

Определение 1.2. *Функция $u \in H(B,\omega)$ называется H - решением уравнения (1.1), если интегральное тождество (1.5) выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(B,\omega)$.*

Введенные выше W - решения и H -решения уравнения (1.1) связаны W - и H - задачами Дирихле

$$Lu_1 = 0 \text{ в } B,\ u_1 \in W(B,\omega),\ h \in C^\infty(\overline{B}),\ (u_1 - h) \in W_0(B,\omega) \tag{1.6}$$

и

$$Lu_2 = 0 \text{ в } B,\ u_2 \in H(B,\omega),\ h \in C^\infty(\overline{B}),\ (u_2 - h) \in H_0(B,\omega) \tag{1.7}$$

соответственно. Основной результат настоящей работы состоит в том, что каждая из этих задач однозначно разрешима и существует граничная функция $h \in C^\infty(\overline{B})$, для которой $u_1(x) \ne u_2(x)$.

Для весовой функции вида

$$\omega(x)=\begin{cases}|x|^{-\alpha}, & x_1x_2>0;\\ |x|^{\alpha}, & x_1x_2<0,\end{cases} \tag{1.8}$$

понятие W -и H - решений уравнения рассматриваемого вида введено в [4], а однозначная разрешимость W -и H - задач Дирихле и существование у них различных решений с одной и той же граничной функцией установлено в [5].

§2. Существование W - решений и H - решений

2.1. Соболевские пространства $W(B,\omega)$ и $H(B,\omega)$.

Ниже $\omega(x)$ означает вес, определенный равенством (1.2). Для функций $u\in W(B,\omega)$ используется полярная система координат с центром в начале координат, задаваемая равенством

$$u(x)=u(r,\theta),$$

и используются обозначения

$$D^{(1)}=B\cap\{x:x_1>0,x_2>0\},\ D^{(2)}=B\cap\{x:x_1<0,x_2<0\},$$

$$D_r^{(i)}=D^{(1)}\cap\{x:|x|<r\},\ S_r^{(i)}=D^{(1)}\cap\{x:|x|=r\},\ i=1,2.$$

Пусть еще $d\mu_i=|x|^{-\alpha_i}$, $i=1,2$. Для измеримого множества $E\subset R^2$ и неотрицательной измеримой функции f полагается

$$\mu_i(E)=\int_E d\mu_i,\ \oint_E f(x)d\mu_i=\frac{1}{\mu_i(E)}\int_E f(x)d\mu_i,\ i=1,2.$$

Покажем, что сужение функции $u\in W(B,\omega)$ на $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ имеет следы $u^{(i)}(0)$, $i=1,2$, в начале координат, равные

$$u^{(i)}(0)=\lim_{R\to 0}\oint_{D_R^{(i)}}u(x)d\mu_i,\ i=1,2, \tag{2.1}$$

и для любого $R\in(0,1]$ имеет место неравенство Харди

$$\int_{D_R^{(i)}}\left(u(x)-u^{(i)}(0)\right)^2|x|^{-2}d\mu_i\le C(a_i)\int_{D_R^{(i)}}|\nabla u(x)|^2d\mu_i,\ i=1,2. \tag{2.2}$$

Доказательство (2.1) и (2.2) проведем для первой четверти круга $D^{(1)}$. Разность следов функции $u\in W(B,\omega)$ на дугах $S_r^{(1)}$ и $S_\rho^{(1)}$, $\rho<r<1$, для почти всех $\theta\in[0,\pi/2]$ удовлетворяет равенству

$$\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2=\frac{1}{2}\int_{\rho}^{r}\left(u(\tau,\theta)-u(\rho,\theta)\right)u_{\tau}(\tau,\theta)d\tau\,,$$

в силу которого

$$\int_{0}^{\pi/2}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 d\theta\le\frac{1}{2}\int_{\rho}^{r}\left|u(\tau,\theta)-u(\rho,\theta)\right|\left|u_{\tau}(\tau,\theta)\right|d\tau d\theta \qquad (2.3)$$

и

$$\int_{\rho}^{R}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 r^{-\alpha_1-1}drd\theta\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_{\rho}^{R}r^{-\alpha_1-1}\left(\left|u(\tau,\theta)-u(\rho,\theta)\right|\left|u_{\tau}(\tau,\theta)\right|d\tau d\theta\right)dr.$$

Интегрируя по частям и пользуясь неравенством Коши, получаем, что

$$\int_{\rho}^{R}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 r^{-\alpha_1-1}drd\theta\le C(\alpha_1)\int_{\rho}^{R}\left|u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right|\left|u_{r}(r,\theta)\right|r^{-\alpha_1-1}drd\theta\le$$

$$\le\varepsilon\int_{\rho}^{R}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 r^{-\alpha_1-1}drd\theta+C(\alpha_1,\varepsilon)\int_{\rho}^{R}\left|u_{r}(r,\theta)\right|^2 r^{1-\alpha_1}drd\theta,$$

и после соответствующего выбора ε будем иметь:

$$\int_{\rho}^{R}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 r^{-\alpha_1-1}drd\theta\le C(\alpha_1)\int_{\rho}^{R}\left|u_{r}(r,\theta)\right|^2 r^{-\alpha_1-1}drd\theta\le$$

$$\le C(\alpha_1)\int_{B_R/B_\rho}\left|\nabla u(x)\right|^2 d\mu_1 \qquad (2.4)$$

В частности, для любого $R_0\in(\rho,R)$

$$\int_{R_0}^{R}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 r^{-\alpha_1-1}drd\theta\le C(\alpha_1)\int_{D_R^{(1)}}\left|\nabla u(x)\right|^2 d\mu_1\,. \qquad (2.5)$$

Кроме того, из неравенств (2.3) и (2.4) легко следует, что

$$\int_{0}^{\pi/2}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 d\theta\le C(\alpha_1)r^{\alpha_1}\int_{B_r/B_\rho}\left|\nabla u(x)\right|^2 d\mu_1\,.$$

Таким образом,

$$\int_{0}^{\pi/2}\left(u(r,\theta)-u(\rho,\theta)\right)^2 d\theta\to 0 \text{ при } r,\rho\to 0$$

и существуют пределы

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}u(\rho,\theta)d\theta=u^{(1)}(0),\ \lim_{\rho\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}u^2(\rho,\theta)d\theta=\left(u^{(1)}(0)\right)^2.$$

Переходя теперь в (2.5) к пределу сначала при $\rho\to 0$, а затем при $R_0\to 0$, получим неравенство Харди (2.2). Для доказательство (2.1) достаточно заметить, что в силу (2.2)

$$\left|\oint_{D_R^{(i)}}\left(u(x)-u^{(i)}(0)\right)d\mu_i\right|\le C(\alpha_i)R^{\alpha_i/2}\left(\int_{D_R^{(i)}}\left|\nabla u(x)\right|^2 d\mu_i\right)^{1/2},\ i=1,2.$$

Ниже $W_2^1(D)$ означает соболевское пространство функций, L_2- суммируемых в области D вместе с обобщенными производными первого порядка.

Лемма 2.1. *Для принадлежности функции $u(x)$ весовому соболевскому пространству $H(B,\omega)$ необходимо и достаточно выполнение равенства $u^{(1)}(0)=u^{(2)}(0)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $u\in W(B,\omega)$ и $u^{(1)}(0)=u^{(2)}(0)=u(0)$. Покажем принадлежность $u(x)$ пространству $H(B,\omega)$. Возьмем срезающую функцию $\eta_\varepsilon\in C^\infty(B)$, такую, что $0\le\eta_\varepsilon(x)\le 1$, $\eta_\varepsilon(x)=1$ при $x\in B/B_{2\varepsilon}$, $\eta_\varepsilon(x)=0$ при $x\in B_\varepsilon$, $|\nabla\eta_\varepsilon|\le const\varepsilon^{-1}$, и положим $\upsilon_\varepsilon(x)=(u(x)-u(0))\eta_\varepsilon(x)$, $\upsilon(x)=u(x)-u(0)$. Так как вне окрестности начала координат пространства H и W_2^1 совпадают и множество гладких функций плотно в W_2^1, то $\upsilon_\varepsilon\in H(B,\omega)$. Поэтому достаточно показать, что $\upsilon_\varepsilon\to\upsilon$ в $W(B,\omega)$ при $\varepsilon\to 0$. Пусть $F=D^{(1)}\bigcup D^{(2)}$, $G=B\setminus F$, $\Omega_\varepsilon=B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon$. Как нетрудно видеть,

$$\|\upsilon-\upsilon_\varepsilon\|^2_{W(F,\omega)}\le C\left(\varepsilon^2\int_{F\cap\Omega_\varepsilon}\upsilon^2(x)\omega(x)dx+\int_{F\cap\Omega_\varepsilon}\left|\nabla\upsilon(x)\right|^2\omega(x)dx\right)$$

и по неравенству Харди (2.2), примененному к первому интегралу в правой части последнего неравенства,

$$\|\upsilon-\upsilon_\varepsilon\|^2_{W(F,\omega)}\le C\int_{B_{2\varepsilon}}\left|\nabla\upsilon(x)\right|^2\omega(x)dx\to 0\ \text{при}\ \varepsilon\to 0. \quad (2.6)$$

При оценке соответствующей нормы по множеству G отметим, что функцию $u(x)$ можно считать ограниченной, $|u|\le M$, поскольку для срезки

$$u_k(x)=\begin{cases} u(x), \text{ если } |u|\le k, \\ +k, \text{ если } |u|>k. \end{cases}$$
нетрудно показать сильную сходимость $u_k \to u$ в $W(B,\omega)$ при $k\to\infty$. В таком случае

$$\|\upsilon-\upsilon_\varepsilon\|^2_{W(F,\omega)} \le C\left(M^2\left(\varepsilon^{\beta_1}+\varepsilon^{\beta_2}\right)+\int_{B_{2\varepsilon}}|\nabla\upsilon(x)|^2\omega(x)dx\right)\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0. \quad (2.7)$$

Сопоставляя (2.6) и (2.7) придем к требуемому утверждению. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $u\in H(B,\omega)$ и $u_j\in C^\infty(B)\cap W(B,\omega)$ последовательность, сходящаяся в $W(B,\omega)$ к функции $u(x)$. Из неравенства Харди (2.2), примененного к функции $\upsilon_j(x)=u(x)-u_j(x)$, следует, что

$$\left|u^{(i)}(0)-u_j(0)\right|\le C(\alpha)\int_{D^{(i)}}\left(\upsilon_j^2(x)+\left|\nabla\upsilon_j(x)\right|^2\right)d\mu_i,\ i=1,2,$$

и

$$\lim_{j\to\infty}u_j(0)=u^{(1)}(0)=u^{(2)}(0).$$

Необходимость доказана. Лемма доказана.

Приводимая ниже функция $u\in W(B,\omega)$.

$$u(x)=\begin{cases} 1, \text{ при } x_1>0, x_2>0; \\ \sin\theta, \text{ при}, x_1<0, x_2>0; \\ 0, \text{ при } x_1<0, x_2<0; \\ \cos\theta, \text{ при } x_1>0, x_2<0 \end{cases}$$

не принадлежит соболевскому пространству $H(B,\omega)$.

2.2. Разрешимость задачи Дирихле

Ниже пространства $W_0(B,\omega)$ и $H_0(B,\omega)$ рассматриваются как гильбертовы со скалярным произведением

$$\langle u,\upsilon\rangle=\int_B\nabla u\nabla\upsilon\omega dx.$$

Рассмотрим задачи Дирихле (1.6) и (1.7).

Теорема 2.1. *Задачи (1.6), (1.7) однозначно разрешимы и существует граничная функция $h\in C^\infty(\overline{B})$, для которой решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ различны.*

Доказательство. Введением новых неизвестных функций $\upsilon_i(x)=u_i(x)-h(x)$, $i=1,2$, задачи (1.6), (1.7) преобразуются к виду

$$L\upsilon_1=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \text{ в } B,\ \upsilon_1\in W_0(B,\omega),$$

$$L\upsilon_2=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \text{ в } B,\ \upsilon_2\in H_0(B,\omega).$$

Решения здесь понимаются в смысле интегрального тождества

$$\int_B\nabla\upsilon\nabla\psi\omega dx=-\int_B\nabla h\nabla\psi\omega dx$$

на пробных функциях $\psi(x)$ из соответствующего соболевского пространства. Однозначная разрешимость приведенных выше задач, (а вместе с ними и задач (1.6), (1.7)) является следствием теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Отметим, что решения задач (1.6), (1.7) не зависят от способа, которым граничная функция $h(x)$ продолжена с окружности S в круг B.

Известно (см. [4]), что пространство $H_0(B,\omega)$ имеет коразмерность один в $W_0(B,\omega)$. Поэтому найдется ненулевой элемент $z\in W_0(B,\omega)$ такой, что $W_0(B,\omega)=\{u:u(x)=\psi(x)+sz(x)\}$, где $\psi\in H_0(B,\omega)$, $s\in R^1\setminus\{0\}$, (2.8) и

$$\int_B\nabla z\nabla\psi\omega dx=0\quad\forall\psi\in H_0(B,\omega). \tag{2.9}$$

Тождество (2.9) означает, что $z(x)$ есть слабое решение задачи Дирихле для однородного уравнения (1.1) с нулевым граничным условием на ∂B. Будем искать требуемое W - решение задачи (1.6) в виде $u_1(x)=u_2(x)+tz(x)$, где $u_2(x)$- H - решение задачи (1.7). В силу (2.8) должно выполняться интегральное тождество

$$\int_B(\nabla u_2+t\nabla z)(\nabla\psi+s\nabla z)\omega dx=-\int_B\nabla h(\nabla\psi+s\nabla z)\omega dx,\ \psi\in H_0(B,\omega),$$

которое вместе с (2.9) приводит к условию

$$\int_B\nabla z\nabla z\omega dx=-\int_B\nabla h\nabla z\omega dx. \tag{2.10}$$

Отсюда находим $t\neq0$, если только правая часть (2.10) отлична от нуля. Допуская равенство

$$\int_B\nabla z\nabla h\omega dx=0\quad\forall h\in C^\infty(\overline{B}),$$

заключаем, что функция $z(x)$ есть также решение задачи Неймана. Но тогда функция $z(x)$, продолженная нулем вне круга B, служит решением уравнения (1.1) в R^2, если вес $\omega(x)$ продолжить естественным образом. В каждой четверти плоскости вес является липшицевым, и согласно известному результату (см.[6]), $z(x)\equiv 0$ в каждой четверти. Это противоречит тому, что $z(x)\neq 0$ в $W_0(B,\omega)$. Тем самым доказано, что $u_1(x)\neq u_2(x)$ при подходящем выборе $h(x)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жиков В.В. Весовые соболевские пространства. Матем. сборник. //1998, т.189, №8, с.27-58.
2. B.Muckenhoupt Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function // Transactions A.M.S., vol. 15, 1972, p.207-226.
3. E.Fabes, C.Keniq, R.Serapioni The lokal regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. P.D.E., vol. 7, 1982, №1, p.77-116.
4. Жиков В.В. К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях // Функ.анализ и его приложения // 2001, т.35, №1, с.23-39.
5. Алхутов Ю.А., Жиков В.В. О гельдеровости решений одного эллиптического уравнения. // Современная математика и ее приложения, 2003, т.10, с.8-21.
6. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. // М.Мир, 1987.

MÜNTƏZƏM CIRLAŞAN İKİNCİ TƏRTİB DİVERGENT ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

S.T.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

Məqalədə uyğun çəkili Sobolev fəzasında hamar funksiyalar çoxluğu sıx olmayan, müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib model elliptik tənliklər tədqiq olunur. W, H - həlləri anlayışı verilir və uyğun Dirixle məsələsinin birqiymətli həll olunması isbat olunur.

THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR UNIFORMLY DEGENERATING DIVERGENT ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

S.T.GUSEYNOV

SUMMARY

The first boundary value problem for uniformly degenerating divergent elliptic equations of the second order.

A model uniformly degenerating elliptic equation of the second order for which a set of smooth functions are not dense in corresponding weight Sobolev space is studied in the paper. The notion of W and H solutions are introduced, a unique solvability of corresponding Dirichlet problem is proved.